数理解析研究所講究録
460巻 1982年 72-87

Marksmanship Contests with a Random Termination Games of Timing

姫路工大　寺岡義伸

1 モデル　ここで取扱う問題は 以下のモデルで端的に表現できる 不確実性下におけるタイミングのゲームである.

弾丸を1発づつ装備した銃を手にした n人のplayerが距離1だけ離れた各自の標的に単位速度で近づきながら，任意の時刻で発砲できる. 射撃の精度は精度関数:

$A_i(t)$ = Player i が時刻 $t\in[0,1]$ において発砲したとき彼の標的に当たる確率

で表わされる. ただし $A_i(0)=0$, $A_i(1)=1$ である単調増加関数と仮定 ($i=1,\cdots,n$) する. 最も早く標的を射ることに成功した者が, この試合の勝者となりこの試合を終らせる. さらに, この試合は cdf $H(t)=P_r\{T\leqq t\}$ をもつランダムタイム $T\in[0,1]$ で打ち切られることになっている. 各playerはできるだけ発砲を遅らせた方が成功しやすい. しかし, 発砲を待ちすぎると他のplayerが先に成功してしまうかもしれない. その上 この試合は何時打ち切られるか わからない. 二重の意味での最適な発砲時刻を決めることが この問題の目的となる.

上記のモデルは，打ち切り時刻が不確実であるという状態におかれたn人の競争者が，何時行動するのが最適であるかを決定する，タイミング問題を端的に表現したものであり，我々はこの問題をゲーム理論の立場から解析する．

従来のタイミングゲームと同様に playerに利用できる情報に2つの型がある．ある1人が行動（発砲）したとき，その事実が直ちに残り全員の playerに知らされるとき，彼は noisy bullet を持っているといい，反対に，既に行動したのかまだしていないのかが他の playerに知らされない時 彼は silent bullet を持つという．

ここで，この game の payoff を次の様な2つの種類とする．

（i）勝者は敗者から one unit の returnを受取り，引き合けの時は0とする．（期待利得の最大化）0和 game へ導く．

（ii）勝者は試合の審査員から one unit の returnを受取る．この際，引き合けも成功した者は全員勝者とする．（勝利確率の最大化）非0和 gameへ導く．

これは，あきらかに古典的決闘ゲームを不確実性下におけるタイミング問題に拡張したものである（［1，2，3，4］）．他の形で不確実性下のタイミングゲームを取扱った報告としては Sweat［6］，Teraoka［8，9，10，11］，Styszynski［7］ Kurisu［5］がある．

2　仮定　後の議論の為次のような仮定をする。

(i)　$A_i(t)$ は t につき連続的微分可能，$A'_i(t)>0$，$t\in[0,1)$.

(ii)　cdf $H(t)$ は連続，増加，$H(0)=0$，$H(1)=1$，かつ pdf $h(t)>0$ をもつ。

(iii)　$K_i(t)=\{1-H(t)\}A_i(t)$，$i=1,\cdots,n$ は t につき unimodal.

(iv)　$m_i=K_i^{-1}(\max_t K_i(t))$，$m=\min(m_1,\cdots,m_n)$.

3　Two-Person Noisy Contest　ここでは $n=2$ で両者共 noisy bullet を持っている場合を取扱う。この場合の純戦略を次のように設定する：

$(x,\sigma(y))=[0,1]$ 内に点 x を選び，もしIIが x 以前の y で既に発砲していれば $\sigma(y)$ で発砲し，まだ発砲していなければ x で発砲するというIの純戦略；

$(y,\tau(x))=[0,1]$ 内に点 y を選び，もしIが y 以前の x で既に発砲していれば $\tau(x)$ で発砲し，まだ発砲していなければ y で発砲するというIIの純戦略。

したがって次のような関係を得る：

$$y\leqq x\leqq\sigma(y)\ \text{for I}\ ;\quad x\leqq y\leqq\tau(x)\ \text{for II}.$$

もし random termination を仮定しなければ通常

$$\sigma(y)=\tau(x)=\text{termination time (not random)}$$

となっている。特に termination time $=1$ の時が従来の報告である([1, 2; 315-324, 4, 5])。

3.1 Two-person zero-sum noisy contest 前節の payoff (i) より Player I への期待利得 $M((x,\sigma(y)),(y,\tau(x)))$ は

$$(3.1)\quad M((x,\sigma(y)),(y,\tau(x)))=\begin{cases} K_1(x)-\{1-A_1(x)\}K_2(\tau(x)), & x<y \\ K_1(x)-K_2(x), & x=y \\ -K_2(y)+\{1-A_2(y)\}K_1(\sigma(y)), & x>y. \end{cases}$$

t_0 を $(0,m)$ における方程式 $K_1(t)-\{1-A_1(t)\}K_2(m_2)=-K_2(t)+\{1-A_2(t)\}K_1(m_1)$ の唯一根とし，この t_0 に対して

$$v=K_1(t_0)-\{1-A_1(t_0)\}K_2(m_2)=-K_2(t_0)+\{1-A_2(t_0)\}K_1(m_1)$$

とおく．次に任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ を

$$\delta=\min\left[A_2^{-1}\left(A_2(t_0)+\frac{\varepsilon}{1-H(t_0)+K_1(m_1)}\right),A_1^{-1}\left(A_1(t_0)+\frac{\varepsilon}{1-H(t_0)+K_2(m_2)}\right)\right]-t_0$$

と選び，cdf $\xi(\cdot)$ を次のように定義する：

$$(3.2)\quad \xi(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqq t<t_0 \\ \dfrac{x-t_0}{\delta}, & t_0\leqq t<t_0+\delta \\ 1, & t_0+\delta\leqq t\leqq 1. \end{cases}$$

また，次の混合戦略も定義する：

$(\xi(\cdot), m_i)$ = 相手がまだ発砲していないならば cdf $\xi(\cdot)$ をもつ random time で発砲し，彼がまだ発砲していないうちに相手が発砲してしまったならば固定時刻 m_i で発砲するという Player i の混合戦略．

定理 1. (i) game (3.1) は value v をもつ.

(ii)
$$v \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} K_1(t_0) - K_2(t_0)$$

$$\Longrightarrow \begin{Bmatrix} (t_0, m_1) \text{ は I の optimal strategy, } (\xi(y), m_2) \text{ は II の} \\ \quad 1\text{つの } \varepsilon\text{-optimal mixed strategy} \\ ((t_0, m_1), (t_0, m_2)) \text{ は saddle point} \\ (\xi(x), m_1) \text{ は I の 1つの } \varepsilon\text{-optimal mixed strategy,} \\ \quad (t_0, m_1) \text{ は II の optimal strategy} \end{Bmatrix}.$$

3.2 Two-person non-zero-sum noisy contest 前節の payoff (ii) より $M_i((x, \sigma(y)), (y, \tau(x)))$ を Player i への期待利得とすると

$$(3.3) \quad M_1((x, \sigma(y)), (y, \tau(x))) = \begin{cases} K_1(x), & x \leqq y \\ \{1 - A_2(y)\} K_1(\sigma(y)), & x > y \end{cases};$$

$$(3.4) \quad M_2((x, \sigma(y)), (y, \tau(x))) = \begin{cases} K_2(y), & y \leqq x \\ \{1 - A_1(x)\} K_2(\tau(x)), & y > x \end{cases}.$$

ここで t_1 と t_2 をそれぞれ

$$K_1(t) = \{1 - A_2(t)\} K_1(m_1), \quad t \in [0, m_1];$$

$$K_2(t) = \{1 - A_1(t)\} K_2(m_2), \quad t \in [0, m_2]$$

の唯一根とし, 関数 $\theta_i(t)$ を

$$\theta_i(t) = \frac{K'_{3-i}(t)}{K_{3-i}(t) - \{1 - A_i(t)\} K_{3-i}(m_{3-i})}$$

$$\text{for } t \in (t_{3-i}, m_{3-i}), \quad i = 1, 2.$$

で定義する．次に $(t_1, m_1) \cap (t_2, m_2) \neq \phi$ のときに，
cdfs $F^*(x)$ と $G^*(y)$ を次のように定める：

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq x \leqq a \\ 1 - \exp\left(-\int_a^x \theta_1(t)dt\right) + \alpha I_b(x), & a \leqq x \leqq b \\ 1, & b < x \leqq 1 \end{cases} ;$$

$$G^*(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq y \leqq a \\ 1 - \exp\left(-\int_a^y \theta_2(t)dt\right) + \beta I_a(y), & a < y \leqq b \\ 1, & b < y \leqq 1, \end{cases}$$

ここに $[a, b]$ は $(t_1, m_1) \cap (t_2, m_2)$ の任意の部分区間，
$I_b(z)$ は $z = b$ での unit-step function, $\alpha = \exp\left(-\int_a^b \theta_1(t)dt\right)$,
$\beta = \exp\left(-\int_a^b \theta_2(t)dt\right)$．さらに

$(F(\cdot), m_i)$ = まだ相手が発砲していなければ cdf $F(\cdot)$ をもつ random time で発砲し，自分がまだ発砲していない状態のときに相手が発砲すれば時刻 m_i で発砲するという Player i の混合戦略．

と定義すると，次の定理を得る．

定理 2．(i) $(t_1, m_1) \cap (t_2, m_2) = \phi$ ならば，$((m_1, m_1), (m_2, m_2))$ は非0和 game (3.3), (3.4) の1つの平衡点であり，その平衡値 v_i^* $(i = 1, 2)$ は

$$v_1^* = \begin{Bmatrix} K_1(m_1) \\ \{1 - A_2(m_2)\} K_1(m_1) \end{Bmatrix} ; \quad v_2^* = \begin{Bmatrix} \{1 - A_1(m_1)\} K_2(m_2) \\ K_2(m_2) \end{Bmatrix} \text{ if } m_1 \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} m_2.$$

(ii) $(t_1, m_1) \cap (t_2, m_2) \neq \phi$ ならば $((F^*(x), m_1), (G^*(y), m_2))$ は非0和 game (3.3), (3.4) の平衡混合戦略の1つの対であり, 平衡値 v_i^* $(i = 1, 2)$ は

$$v_1^* = K_1(a) \geqq K_1(t_1) \ ; \ v_2^* = K_2(a) \geqq K_2(t_2),$$

ここに $[a, b]$ は $(t_1, m_1] \cap (t_2, m_2]$ の任意の部分区間.

4 Two Person Silent Contest ここでは, $n = 2$ で両者共 silent bullet を持っている場合を取扱う. この場合両者共互に相手の行動時刻に関する何の情報も持たないのであるから, I と II の純戦略をそれぞれ $x \in [0, 1]$ と $y \in [0, 1]$ と定める. また I と II の混合戦略 (cdf) をそれぞれ $F(x)$ と $G(y)$ とし, 次の記号を約束する:

$$M(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y), \text{ and}$$

$$M(x, G) = \int_0^1 M(x, y)\, dG(y) \ ; \ M(F, y) = \int_0^1 M(x, y)\, dF(x).$$

0和ゲームの場合の期待利得はすぐ求まり, 最適戦略の形も予想はできるが, その具体的な形となると $A_1(t) = A_2(t) = t$ $H(t) = t$ の時でさえ求めることができなかった. 今後の問題となる. ここでは非0和ゲームの時のみ解析する.

$M_i(x, y)$ を Player i への期待利得 $(i = 1, 2)$ とすると前節と同様にして

$$(4.1) \quad M_1(x, y) = \begin{cases} K_1(x) & x \leqq y \\ \{1 - A_2(y)\} K_1(x) & x > y \end{cases} ;$$

(4.2) $$M_2(x,y)=\begin{cases}K_2(y), & y\leqq x\\ \{1-A_1(x)\}K_2(y), & y>x.\end{cases}$$

そうすると次の定理を得る.

定理3. a_1 と a_2 をそれぞれ方程式

$$\int_a^m \frac{K_2'(t)}{A_1(t)\{K_2(t)\}^2}dt=\frac{1}{K_2(a)}\ ;\ \int_a^m \frac{K_1'(t)}{A_2(t)\{K_1(t)\}^2}dt=\frac{1}{K_1(a)}$$

の $[0,m]$ における唯一根とし, $a=\max(a_1,a_2)$ とする. そうすると混合戦略 $F^0(x)$ for I と $G^0(y)$ for II:

$$F^0(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a\\ \int_a^x \frac{K_2(a)K_2'(t)}{A_1(t)\{K_2(t)\}^2}dt+\alpha I_m(x) & a\leqq x\leqq m\\ 1, & m<x\leqq 1\end{cases}\ ;$$

$$G^0(y)=\begin{cases}0, & 0<y<a\\ \int_a^y \frac{K_1(a)K_1'(t)}{A_2(t)\{K_1(t)\}^2}dt+\beta I_m(y) & a\leqq y\leqq m\\ 1, & m<y\leqq 1,\end{cases}$$

ここに $I_m(z)$ は $z=m$ での unit-step function であり,

α と β は

$$\alpha=\begin{Bmatrix}0\\0\\1-F^0(1-0)\end{Bmatrix};\ \beta=\begin{Bmatrix}1-G^0(1-0)\\0\\0\end{Bmatrix}\quad \text{if } a=\begin{Bmatrix}a_1>a_2\\a_1=a_2\\a_2>a_1\end{Bmatrix}$$

によって与えられる

は非0和ゲーム (4.1), (4.2) に関して以下の関係を満足する.

(i) $m=m_1<m_2$ ならば

$$\begin{cases} M_1(F,G^\circ) \leqq M_1(F^\circ,G^\circ)=K_1(a) & \text{for all } F\in D \\ M_2(F^\circ,G^\circ)=K_2(a) \end{cases}$$

(ii) $m=m_2<m_1$ ならば

$$\begin{cases} M_1(F^\circ,G^\circ)=K_1(a) \\ M_2(F^\circ,G) \leqq M_2(F^\circ,G^\circ)=K_2(a) & \text{for all } G\in D \end{cases}$$

ここに D は $[0,1]$ 上のすべての cdfs の集合.

5 N-Person Contest with Equal Accuracy 本節では player の数が n で $A_i(t)=t$ for all i の場合を payoff (ii) について定式化し，解析する. 本節では $K(t)=\{1-H(t)\}t$ と記号を約束する。

5.1 N-person silent contest n 人共 silent bullet を持っている問題を考える. 前節と同様に Player i の純戦略を $x_i\in[0,1]$, $i=1,\cdots,n$ と定める. $M_i(x_1,\cdots,x_n)$ を Player i への期待利得とすると

(5.1) $M_1(x_1,\cdots,x_n)=(1-y_1)\cdots(1-y_j)K(x_1)$

$$\text{if } y_1\leqq\cdots\leqq y_j<x_1\leqq y_{j+1}\leqq\cdots\leqq y_{n-1}$$

ここに $y_1,\cdots,y_{n-1}$ は $x_2,\cdots,x_n$ を小さい方から並べたもの. この場合 Player i にとっては equal accuracy の仮定から，彼より先に発砲した player の組合せが彼の期待利得に関係する. (5.1)で表現できる場合の数は ${}_nC_j$ 通りである。全 player

の平衡戦略は同一であり (l,u) 上の pdf $f(t)$ で構成されると想定し $M_1(x,f,\cdots,f)=\int_0^1\cdots\int_0^1 M_1(x,y_1,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n$ とおくと

$$(5.2)\quad M_1(x,f,\cdots,f)=\begin{cases}K(x), & 0\leqq x<l\\ K(x)\left[1-\int_l^x y f(y)dy\right]^{n-1}, & l\leqq x<u\\ K(x)\left[1-\int_l^u y f(y)dy\right]^{n-1}, & u\leqq x\leqq 1.\end{cases}$$

したがって次の定理を得る。

定理4. mを$K(x)$の最大値を与える点とし，lを方程式

$$\int_l^m \left[K'(x)/\left(x\{K(x)\}^{n/(n-1)}\right)\right]dx=(n-1)/\{K(l)\}^{1/(n-1)}$$

の$(0,m)$における唯一根とすると各playerの平衡戦略は

$$f^*(x)=\begin{cases}0, & x\in(l,m)^c\\ \dfrac{1}{n-1}\dfrac{\{K(l)\}^{1/(n-1)}}{x\{K(x)\}^{n/(n-1)}}, & x\in(l,m)\end{cases}$$

なる pdf で与えられ，Player i への平衡値は $K(l)$ となる。

5.2 N-person noisy contest　n人共 noisy bulletを持っている場合を考える。この場合，自分がまだ発砲しておらず，試合がまだ続行しているという状態におかれた playerにとっては，他の$n-1$人中まだ何人が発砲していないのか，および既に発砲してしまった playerはどの時点で発砲したのかが 純戦略の構成要因となる。さらにもし Player iが最初他の$n-1$人を意識して時刻x_{n-1}で発砲する計画の時に他の$n-1$人の中の1人が時刻$y_1(<x_{n-1})$で発砲したとすると，この瞬間に Player iは確率$1-y_1$で$n-1$人ゲームをプレイ

する playersの一員となってしまう。そうなると改めて残りの$n-2$人を意識してx_{n-2}で発砲する計画をたてざるをえない。
以上の考察をもとに各playerの純戦略を次のように定める：

$$\pi_n(t)=(x_{n-1}(t),\ x_{n-2}(t|y_1),\ x_{n-3}(t|y_1,y_2),\ \cdots,\ x_0(t|y_1\cdots y_{n-1}))$$

ただし　$0\leqq t\leqq x_{n-1}(t)\leqq x_{n-2}(t|y_1)\leqq\cdots\leqq x_0(t|y_1,\cdots y_{n-1})$.

この意味は，時刻tにおいて自分がまだ発砲しておらず試合が続行されている状態の時，残り$n-1$人がまだ発砲していない時は時刻$x_{n-1}(t)$で発砲し，既に$n-k-1$人が時刻$y_1, y_2, \cdots, y_{n-k-1}$で発砲しており$k$人がまだ発砲していないならば時刻$x_k(t|y_1,\cdots,y_{n-k-1})$で発砲するという計画。

次に上記の純戦略のk人の組を$\overline{W}_k(t)=(\pi_n(t),\cdots,\pi_n(t))$で示し，$\overline{W}_k(t)$にもとづく$k$人の発砲時刻を小さい方から並べたものを$y_1,\cdots,y_k$ $(y_1\leqq\cdots\leqq y_k)$で表わすことにする。
そして時刻tでn人中 Player I と残りk人がまだ発砲しておらず，$n-k-1$人が既に発砲した状態でのIへの期待利得を$M_1^k(\pi_n(t),\overline{W}_k(t))$と書くと

$$M_1^{n-1}(\pi_n(t),\ \overline{W}_k(t))$$

$$(5.3)\quad =\begin{cases} K(x_n(t)), & t\leqq x_{n-1}\leqq y_1 \\ (1-y_1)M_1^{n-2}(\pi_n(t),\overline{W}_{n-2}(t)), & y_1< x_{n-2}\leqq y_2 \\ \cdots\cdots & \\ (1-y_1)\cdots(1-y_{n-k-1})M_1^{k}(\pi_n(t),\overline{W}_k(t)), & y_{n-k-1}< x_k\leqq y_{n-k} \\ \cdots & \\ (1-y_1)\cdots(1-y_{n-1})M_1^{0}(\pi_n(t),\overline{W}_0(t)), & y_{n-1}< x_0\leqq 1 \end{cases}$$

ただし $M_1^0(\pi_n(t), \varpi_0(t)) = \max_{x>y_{n-1}\geq t} K(x)$.

次の定理をうる.

定理5. $t_0^0 = m$, t_j^0 $(j=1,\cdots,n-1)$ を方程式 $K(t)=(1-t)^j K(m)$ の $(0, m]$ での唯一根とし

$$x_{n-1}^0(t) = \begin{cases} t \\ t_{n-1}^0 \end{cases} \text{if } t \begin{cases} > \\ \leq \end{cases} t_{n-1}^0, \quad x_j(t|y_1,\cdots,y_{n-j-1}) = \begin{cases} t \\ t_j^0 \end{cases} \text{if } t \begin{cases} > \\ \leq \end{cases} t_j^0$$

とすると, $\pi_{n-1}^0(t) = (x_{n-1}^0, \cdots, x_0^0)$ はゲーム (5.3) の1つの平衡戦略であり, 平衡値は $(1-t_{n-1}^0)^{n-1}K(m)$ となる.

6. Two-Person Silent-Noisy Contest 本節では Player Iは silent bullet を, IIは noisy bullet を持っている非対称な情報様式を有する非0和ゲームを取扱う. 第3節・第4節を参照し, Iの純戦略は $(x, \sigma(y))$, IIの純戦略は $y \in [0,1]$ と定める. この時 Player i への期待利得を $M_i((x,\sigma(y)), y)$ とすると

$$(6.1)\quad M_1((x,\sigma(y)),y) = \begin{cases} K_1(x), & x \leq y \\ \{1-A_2(y)\}K_1(\sigma(y)), & x > y \end{cases};$$

$$(6.2)\quad M_2((x,\sigma(y)),y) = \begin{cases} K_2(y), & y \leq x \\ \{1-A_1(x)\}K_2(y), & y > x \end{cases}.$$

ここで, t_1 を方程式 $K_1(t) = \{1-A_2(t)\}K_1(m_1)$ の $(0, m_1)$ での唯一根とし, $m_2 > t_1$ の場合 $m = \min(m_1, m_2)$ として方程式

$$\int_a^m \frac{K_2'(t)}{A_1(t)\{K_2(t)\}^2}dt = \frac{1}{K_2(a)} \quad , \ a \in (0, m)$$

の唯一根を a とする。さらに $a \leqq t_1$ に対して $cdfs$

$$(6.3) \quad F^*(x) = \begin{cases} 0, & x < t_1 \\ \int_{t_1}^{x} \frac{K_2(t_1)K_2'(t)}{A_1(t)\{K_2(t)\}^2}dt + \alpha I_m(x), & t_1 \leqq x \leqq m \ ; \\ 1, & x > m \end{cases}$$

ただし $\alpha = 1 - \int_{t_1}^{m} \frac{K_2(t_1)K_2'(t)}{A_1(t)\{K_2(t)\}^2}dt \geqq 0$

$$(6.4) \quad G^*(y) = \begin{cases} 0, & y < t_1 \\ 1, & y \geqq t_1 \end{cases} \quad ,$$

$a > t_1$ に対して

$$(6.5) \quad F^\circ(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_{a}^{x} \frac{K_2(a)K_2'(t)}{A_1(t)\{K_2(t)\}^2}dt, & a \leqq x \leqq m \ ; \\ 1, & x > m \end{cases}$$

$$(6.6) \quad G^\circ(y) = \begin{cases} 0, & y < a \\ 1 - \exp\left(-\int_a^y \frac{K_1'(t)}{K_1(t) - K_1(m_1)\{1 - A_2(t)\}}dt\right) + \beta I_m(y), & a \leqq y \leqq m \\ 1, & y > m \end{cases}$$

ただし $\beta = 1 - \exp\left(-\int_a^m \frac{K_1'(t)}{K_1(t) - K_1(m_1)\{1 - A_2(t)\}}dt\right) > 0$

を定義すると 次の定理をうる。

定理6. 非0和ゲーム(6.1)と(6.2)に関して

(i) $m_2 \leqq t_1$ の時 $((m_1, m_1), m_2)$ は1つの平衡点であり，その平衡値 v_1^0, v_2^0 は

$$v_1^0 = \{1 - A_2(m_2)\}K_1(m_1) \;;\; v_2^0 = K_2(m_2),$$

(ii) $a \leqq t_1 < m_2$ の時(6.3)と(6.4)で与えられる混合戦略 (F^*, m_1) と純戦略 G^* はそれぞれIとIIの1つの平衡戦略であり，その平衡値 v_1^0 と v_2^0 は

$$v_1^0 = K_1(t_1) \;;\; v_2^0 = K_2(t_1),$$

(iii) $t_1 < a < m_2$ の時(6.5)と(6.6)で与えられる混合戦略 (F^0, m_1) と G^0 はそれぞれIとIIの1つの平衡戦略であり，その平衡値 v_1^0 と v_2^0 は

$$v_1^0 = K_1(a) \;;\; v_2^0 = K_2(a),$$

という結果を得る.

注(1) $t_1 < m_2$ の時，点 m で確率を残すのは Noisy Player とは限らない. これは従来の結果と大きく異なる.

(2) ここで与えられた平衡戦略は囚人のジレンマ型とはなっているが，このゲームの解として考えるには疑問が残る.

7 結語 打ち切り時刻がランダムであることを仮定することにより，情報様式の違いの影響がより鮮明になった。なお，第3節のくわしい結果は正式の論文として J. O. T. A. に掲載されることが決定している[12].

参考文献

[1] M. Dresher, Games of Strategy: Theory and Applications, Prentice Hall, New York, 1954.

[2] R. A. Epstein, The Theory of Gambling and Statistical Logic, Academic Press, New York, 1977.

[3] M. Fox and G. Kimeldorf, Noisy duels, SIAM J. Appl. Math., **31** (1969), pp. 353-361.

[4] S. Karlin, Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics, Vol. II, Addison-Wesley, New York, 1959.

[5] T. Kurisu, On a noisy-silent vs. silent duel with equal accuracy functions, to appear in Jour. Optim. Theory and Appl.

[6] C. W. Sweat, A single-shot noisy duel with detection uncertainty, Oper. Res., **19** (1971), pp. 170-181.

[7] S. Styszyński, A silent-silent duel with bullets accessible at random moments, Research Report No. 40 (1979), Instytut Matematyki Polittechniki Wrocławskiej.

[8] Y. Teraoka, Noisy duel with uncertain existence of the shot, Internat. J. Game Theory **5** (1976) pp. 170-181.

[9] Y. Teraoka, A single-bullet duel with uncertain information available to the duelists, Bull. Math. Stat. 18 (1979), pp. 69 – 83.

[10] Y. Teraoka, A two-person game of timing with random arrival time of the object, Math. Japonica, 24 (1979), pp. 427 – 438.

[11] Y. Teraoka, Silent-noisy duel with uncertain existence of the shot, Bull. Math. Stat., 19 (1981), pp. 43-52.

[12] Y. Teraoka, A two-person game of timing with random termination, to appear in Jour. Optim. Theory and Appl.